Colle du 2 décembre : Algèbre linéaire

Exercice 0 : Tous les exercices de la semaine précédente.

5.1 Algèbre linéaire

Exercice 1 : Soit G un groupe fini tel que, pour chaque $g \in G$, on a $g^2 = e$. Montrer que l'ordre de G est un puissance de 2.

Exercice 2 : Soit E un K-espace vectoriel. Soient $f_1, ..., f_n$ des endomorphismes nilpotents de E commutant deux à deux. Montrer que $f_1 \circ ... \circ f_n = 0$.

Exercice 3 : *(Lemme des cinq)* Soient $A_1, ..., A_n$ des K-espaces vectoriels. On dit qu'une suite $A_1 \to A_2 \to ... \to A_n$ d'applications linéaires $f_i : A_i \to A_{i+1}$, $i = 1, ..., n-1$, est exacte si, pour tout i, $\mathrm{Ker}(f_{i+1}) = \mathrm{Im}(f_i)$. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "g_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "g_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "g_4"'] & A_5 \arrow[d, "g_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3 \arrow[r, "h_3"'] & B_4 \arrow[r, "h_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

On suppose que les lignes du diagramme sont exactes, et que le diagramme est commutatif, c'est à dire que pour tout i, $h_i \circ g_i = g_{i+1} \circ f_i$. On suppose de plus que g_1, g_2, g_4, g_5 sont des isomorphismes. Montrer que g_3 l'est aussi.

Exercice 4 : Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments. Quel est le cardinal de $SL_n(\mathbb{F}_q)$?

Exercice 5 : Soient A et B deux matrices dans $M_n(K)$ telles que $A + B = AB$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 6 : Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ telle que pour $i \neq j$, $a_{ij}a_{ji} = 0$ et pour i, j, k deux à deux distincts, si $a_{ik} = 0$, alors $a_{ij}a_{jk} = 0$. Calculer $\det(A)$.

Exercice 7 : Soient $\mathbb{K}$ un corps (commutatif), $A \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $AB \in \mathbb{K}[P]$.

Exercice 8 : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R}$ telles que $AB = BA$ et $\det(A + B) \geq 0$. Montrer que, pour $p > 0$, on a $\det(A^p + B^p) \geq 0$.

Exercice 9 : On dit qu'une permutation est un dérangement si elle n'a pas de points fixes. Y a-t'il plus de dérangements pairs ou impairs ?

Exercice 10 : Dans l'espace vectoriel $M_n(K)$, quelle est la plus grande dimension possible d'un sous-espace V tel que, pour tous $X, Y \in V$, $Tr(XY) = 0$?

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quels sont le rang minimal et le rang maximal d'une matrice carrée $n \times n$ dont les coefficients sont exactement $1, 2, ..., n^2$?

Exercice 12 : On dispose de $2n+1$ cailloux. On suppose que dès qu'l'on enlève l'un d'entre eux, les $2n$ restants peuvent être partagés en deux paquets de n cailloux de même masse totale. Sont-ils tous nécessairement de même masse ?

Exercice 13 : *(Théorème de Maschke)* Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soient G un sous-groupe fini de $GL(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E stable par G. On cherche à montrer que F admet un supplémentaire stable par G.
1. Soit p un projecteur de E. Montrer que p commute avec tous les éléments de G si, et seulement si $\mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Ker}p$ sont stables par G.
2. Soit q un projecteur d'image F. Conclure en considérant l'endomorphisme $f = \sum_{g \in G} g \circ q \circ g^{-1}$.

Exercice 14 : Résultant. Applications : (i) À quelle condition sur a et b le polynôme $X^3 + aX + b$ a une racine double ? (ii) Soient P et Q deux polynômes non constants à coefficients complexes. Soit Γ l'image de $t \in \mathbb{C} \mapsto (P(t), Q(t)) \in \mathbb{C}^2$. Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X, Y]$ dont l'ensemble des zéros est exactement Γ.

Exercice 15 : Soit p un nombre premier. **1.** Soient A et B dans $M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $Tr((A + B)^p) \equiv Tr(A^p) + Tr(B^p) \mod p$.
2. Montrer que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{Z})$, on a $Tr(A^p) \equiv Tr(A) \mod p$.
3. Soit p un nombre premier. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que p divise u_p.